NOM : HOURS **Prénom :** Florent

Rouge entourez l'épreuve Bleu entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi : 135 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications en dimension 2 et 3.

Autre sujet : 146 - Résultant

I) ESPACES AFFINES EUCLIDIENS. ISOMÉTRIES.

1) Espaces affines euclidiens

Déf 1 : on appelle espace affine un ensemble $\mathcal{E}$ sur lequel le groupe additif $(E,+)$ d'un espace vectoriel agit à droite, transitivement et librement. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont les points, ceux de E les vecteurs.

Csq 2 : si $M,N \in \mathcal{E}$, $\exists! \vec{x} \in E$ tq $N = M + \vec{x}$.
On note $\vec{x} = \overrightarrow{MN}$.

Déf 3 : E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{E}$ un espace affine sur E. Si E est muni d'une norme euclidienne $\|.\|$, en posant $d(M,N) = \|\overrightarrow{MN}\|$, on obtient une distance sur $\mathcal{E}$ et on dit que $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien.

Ex 4 . $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel euclidien.
. Un plan de l'espace est un espace vect. euclidien.

2) Applications affines

Déf 5 : soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines associés à E et F. $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine s'il existe une application linéaire $\varphi : E \to F$ tq $\forall (M,N) \in \mathcal{E}^2$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$.
On note $\varphi = L(f)$.

Th 6 : $GA(\mathcal{E}) = \{ f : \mathcal{E} \to \mathcal{E},\ f \text{ affine et bijective} \}$ est un groupe.

Prop 7 : $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine.
Alors : • Si f a un point fixe O, l'ensemble des points fixes de f est $O + \operatorname{Ker}(L(f) - id)$
• Si $\operatorname{Ker}(L(f) - id) = \{\vec{0}\}$ alors f a un unique point fixe, et réciproquement.

II) ISOMÉTRIES AFFINES ($\mathcal{E}$ espace affine euclidien)

1) Définition

Déf 8 : Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie si elle conserve les distances, càd si elle vérifie $\forall M,N$, $\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\|$

Th 9 : Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Alors f est une isométrie ssi $\begin{cases} f \text{ est affine} \\ L(f) \in O(E) \end{cases}$

On note $Is(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$.

Csq 10 : une isométrie pourra donc être appelée "isométrie affine". Une isométrie affine est toujours bijective.

2) Types d'isométries affines

Déf 11 . $Is^+(\mathcal{E}) = \{ f \in Is(\mathcal{E}) \text{ tq } L(f) \in O^+(E) \}$.
C'est l'ensemble des déplacements.
. $Is^-(\mathcal{E}) = \{ f \in Is(\mathcal{E}) \text{ tq } L(f) \in O^-(E) \}$.
C'est l'ensemble des anti-déplacements

NOM :

Prénom :

Rouge entourez l'épreuve Bleu

entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi :

Autre sujet :

Rq 12. $Is^+(\mathcal{E}) \lhd Is(\mathcal{E})$.

Déf 13. Les déplacements de $\mathcal{E}$ ayant un point fixe sont appelés rotations affines.

Déf 14. $s \in Is(\mathcal{E})$ est appelée symétrie affine orthogonale si $L(f) \in O(E)$ et $L(f)^2 = Id$.

Prop 15. s une symétrie affine orthogonale. $L(s)$ est une symétrie orthogonale par rapport à un espace vectoriel F. Alors $s \in Is^+(\mathcal{E})$ ssi $\operatorname{codim}(F)$ est paire.

Déf 16. une réflexion affine est une symétrie affine orthogonale par rapport à un hyperplan.

Prop 17. les translations sont des déplacements.

3) Décomposition des isométries affines.

a) En produit de réflexions

Lemme 18. f isométrie de $\mathcal{E}$, $f \neq Id$. Soit A tq $f(A) \neq A$. Tout point fixe de f appartient à l'hyperplan médiateur de $[A, f(A)]$.

Lemme 19. f isométrie de $\mathcal{E}$, $f \neq Id$. Alors il existe une réflexion s telle que l'ensemble des points fixes de $s \circ f$ contienne strictement l'ensemble des points fixes de f.

Th 20. toute isométrie affine d'un espace affine euclidien de dimension n s'écrit comme la composée d'au plus $n+1$ réflexions.

b) Décomposition canonique d'une isométrie :

Lemme 21. E espace vectoriel euclidien. $v \in O(E)$. Alors $\operatorname{Ker}(v - id) = (\operatorname{Im}(v - Id))^{\perp}$.

Th 22. f isométrie affine de $\mathcal{E}$. Alors il existe une isométrie g de $\mathcal{E}$ admettant un point fixe, et un vecteur $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(L(f) - Id)$, uniques, tq $f = t_{\vec{x}} \circ g$. C'est la seule expression $f = t_{\vec{x}} \circ g$ où g est une bijection affine, a un point fixe et commute avec $t_{\vec{x}}$.

Rq 23. comme g a un point fixe, son étude se ramène à celle de v_g, qui est orthogonal. Or on sait que dans une certaine base $\mathcal{B}$,
$$[v_g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_r \end{pmatrix} \text{ où } R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

III) ISOMÉTRIES DU PLAN.

$\mathcal{E}$ espace affine de dim 2.

1) Classification

Prop 24. les éléments de O_2^+ sont des rotations et ceux de O_2^- des symétries orthogonales.

NOM :

Prénom :

Rouge entourez l'épreuve Bleu

entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi :

Autre sujet :

<u>Prop 25</u> : • Si f est un déplacement, alors si $L(f) = id$, f est une translation. Si $L(f)$ est une rotation d'angle $\neq 0\ [2\pi]$, f est une rotation affine.

• si f est un antidéplacement, alors $L(f)$ est une réflexion vectorielle. $f = t_{\vec{u}} \circ s$ avec s isométrie tq $L(s) = L(f)$. On dit que f est une symétrie glissée.

2) Isométries conservant un polygone régulier

<u>Déf 26</u> : on note D_n l'ensemble des isométries conservant le polygone régulier à n côtés. C'est le groupe diédral.

<u>Prop 27</u>. $D_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

III) ISOMÉTRIES DE L'ESPACE

1) Classification. $\mathcal{E}$ espace affine de dim 3.

<u>Prop 28</u> : • $f \in Is^+(\mathcal{E})$. $f = t_{\vec{u}} \circ g$.
→ si $\vec{u} = 0$, f est une rotation
→ si $g = id$, f est une translation.
→ sinon, f est appelé "vissage".
• $f \in Is^-(\mathcal{E})$. $f = t_{\vec{u}} \circ g$.
→ si $L(g)$ est une réflexion : si $\vec{u} = 0$, f est une réflexion, et si $\vec{u} \neq 0$, f est une symétrie glissée
→ si $L(g) = r \circ s$ où $r \in O_3^+$ et $s \in O_3^-$, alors on dit que f est une antirotation.

2) Isométries conservant un polyèdre régulier

<u>Déf 29</u> : X un polyèdre régulier. On note $Is(X)$ les isométries conservant X.

<u>Prop 30</u> : $Is(C) = Is(O)$
$Is(D) = Is(I)$

T = tétraèdre
C = cube
O = octaèdre
D = dodécaèdre
I = icosaèdre

<u>Prop 31</u> : • $Is(T) = S_4$
$Is^+(T) = A_4$
• $Is^+(C) = S_4$
$Is(C) = S_4 \times \mathbb{Z}_2$.
• $Is(D) = S_5$
$Is^+(D) = A_5$.

<u>Développements</u> : ① $Is(T) = S_4$, $Is^+(T) = A_4$
$Is(C) = S_4 \times \mathbb{Z}_2$, $Is^+(C) = S_4$
② Lemme 21 + Th 22 : décomp des applications affines isométriques.

classification des isométries du plan.

f	$\mathcal{L}(f)$	points fixes	
translation $t_{\vec{u}}$	id	$\mathcal{E}$ si $\vec{u} = \vec{0}$ aucun sinon	$Is^+(\mathcal{E})$
rotation affine $\neq Id$	rotation vectorielle $\theta \neq 0 [2\pi]$	un point	$Is^+(\mathcal{E})$
réflexion	réflexion vectorielle.	une droite	$Is^-(\mathcal{E})$
symétrie glissée de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$	réflexion vectorielle	aucun.	$Is^-(\mathcal{E})$

classification des isométries de l'espace.

f	$\vec{f}$	points fixes	
translation $t_{\vec{u}}$	id	$\mathcal{E}$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ϕ sinon	$Is^+(\mathcal{E})$
rotation affine $\neq Id$ $r(D, \theta)$, $\theta \neq 0 [2\pi]$	rotation vect $\vec{r}(\vec{D}, \theta)$	droite $\mathcal{D}$	$Is^+(\mathcal{E})$
vissage $t_{\vec{u}} \circ r(D, \theta)$, $\theta \neq 0 [2\pi]$. $\vec{u} \in \vec{D}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$	rotation vect $\vec{r}(\vec{D}, \theta)$	ϕ	$Is^+(\mathcal{E})$
réflexion : s_P	réflexion vect $\vec{s}_{\vec{P}}$	plan P	$Is^-(\mathcal{E})$
symétrie glissée $t_{\vec{u}} \circ s_P = s_P \circ t_{\vec{u}}$ $\vec{u} \in \vec{P}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$	réflexion vect $\vec{s}_{\vec{P}}$	ϕ	$Is^-(\mathcal{E})$
antirotation. $s_P \circ r(D, \theta)$ $\theta \neq 0 [2\pi]$. $P \perp D$	$\vec{f} = \vec{r}(\vec{D}, \theta) \circ \vec{s}_{\vec{P}}$	$\{P \cap \mathcal{D}\}$. (singleton)	$Is^-(\mathcal{E})$